TEMA 8: CÁLCULO DIFERENCIAL DE UNA VARIABLE

FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

Def. Llamaremos función real de variable real a toda aplicación

$$f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Ejemplos

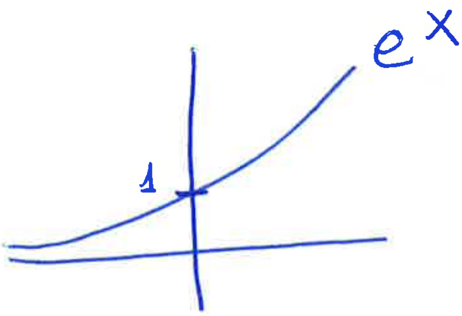
- $f(x) = 2x$, $D = \mathbb{R}$ apl. lineal
- $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$
- $f(x) = \sqrt{x-1}$, $D = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 1\}$
- $f(x) = \log x$ $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

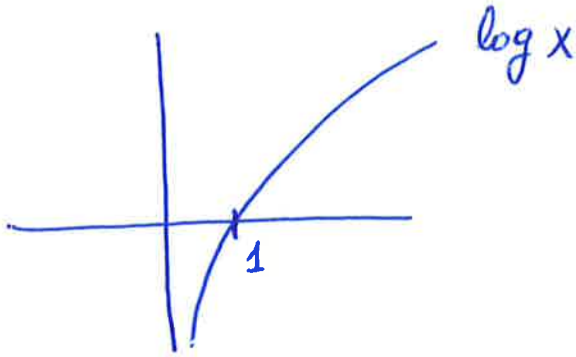
Funciones más habituales que es absolutamente necesario conocer.

1) Polinomios: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$

2) Exponencial y logaritmo:

$$f(x) = e^x \qquad f(x) = \log x.$$





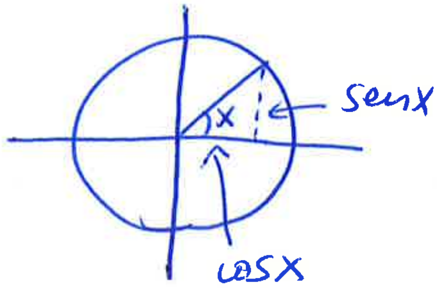
$e^0 = 1$ $\qquad$ $\log 1 = 0$

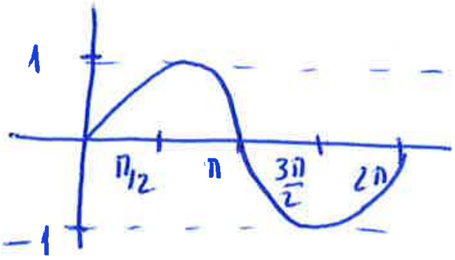
$e^x e^y = e^{x+y}$ $\qquad$ $\log(xy) = \log x + \log y$

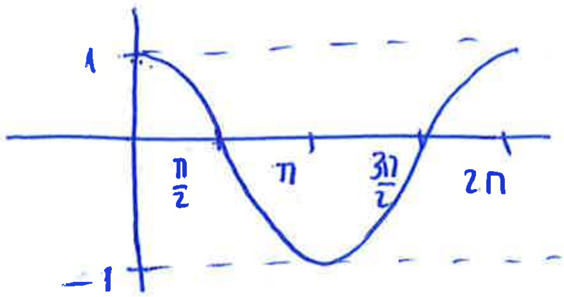
$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$ $\qquad$ $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y.$

3) Funciones trigonométricas

$\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$







Seno y coseno están desfasados $\pi/2$, es decir,

$\operatorname{sen} x = \cos(x - \pi/2)$

$\cos x = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$

Fórmulas trigonométricas que hay que recordar:

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$$

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos(2x)$$

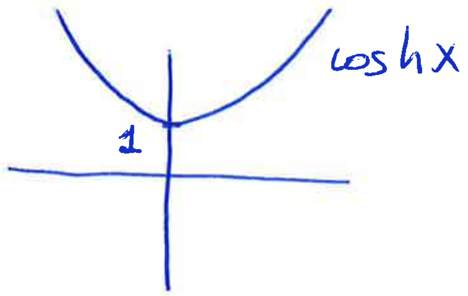
De aquí se deduce:

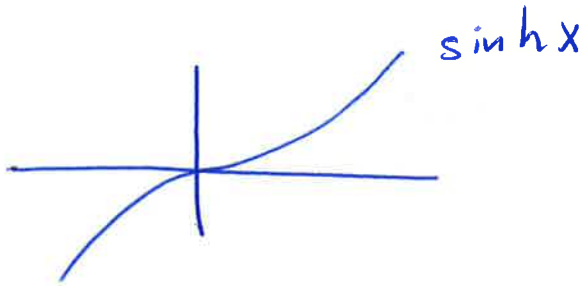
$$2\cos^2 x = 1 + \cos(2x) \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

$$2\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos(2x) \rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)).$$

4) Funciones trigonométricas hiperbólicas

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$





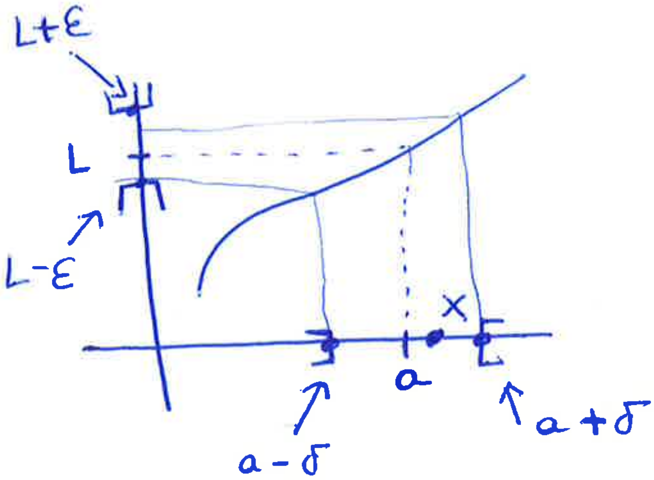
$\cosh 0 = 1$ $\qquad$ $\sinh 0 = 0$

Concepto de límite de una función en un punto

Definición. Se dice que el límite cuando x tiende hacia a de la función $f(x)$ es igual a L (en lenguaje matemático, $\lim_{x \to a} f(x) = L$) si y sólo si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : \text{si } |x-a| < \delta \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Gráficamente,



$|\cancel{f(x)-L}$

$$|f(x)-L| < \varepsilon \iff -\varepsilon < f(x)-L < \varepsilon$$
$$\iff L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$$

Continuidad

Definición.- Sea $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in D$. Se dice que f es continua en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Se dice que f es continua si lo es en todos los puntos $a \in D$.

Ejemplos

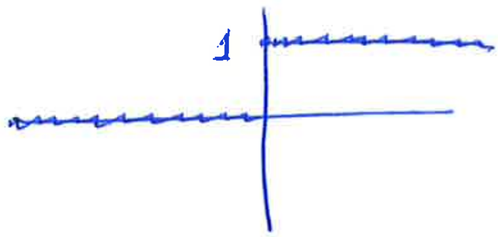
1) Polinomios, exponencial, logaritmo, funciones trigonométricas son todas ellas funciones continuas.

2) La continuidad se conserva bajo las operaciones habituales (suma, resta, producto, composición y cociente (si el denominador no se anula). Por ejemplo,

$$f(x) = 3x - \frac{\log(\cos^2(x^2+1))}{\sqrt{x^2+1}}$$

3) La función escalón (o de Heavisade)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$



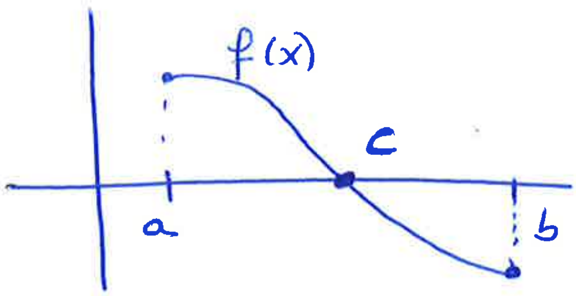
es discontinua en $x=0$.

Algunas propiedades importantes de las funciones continuas

Teorema (Bolzano)

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Entonces existe algún $c \in]a,b[$ tal que

$$f(c) = 0.$$



Aplicación de este teorema: Método de la bisección para resolver numéricamente una ecuación no lineal de la forma $f(x)=0$.

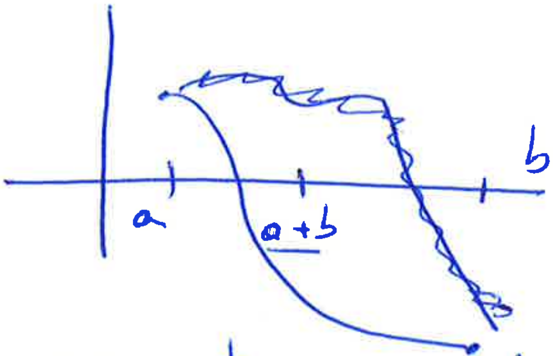
Es decir, dada $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ cont$^{\underline{a}}$, el objetivo es encontrar $c \in]a,b[$ tal que $f(c)=0$.

Algoritmo numérico

1) Hemos de ser capaces de encontrar dos puntos a, b tales que $f(a) \cdot f(b) < 0$ y además f cont^{a} en $[a,b]$.

2) Calculamos el punto medio $\frac{a+b}{2}$ y evaluamos $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Entonces:

   2.1) Si $f(a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, la solución está en $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$. Sustituimos b por $\frac{a+b}{2}$ y repetimos el proceso.



   2.2.) ~~Si f~~ En caso contrario, sustituimos a por $\frac{a+b}{2}$ y repetimos el proceso.

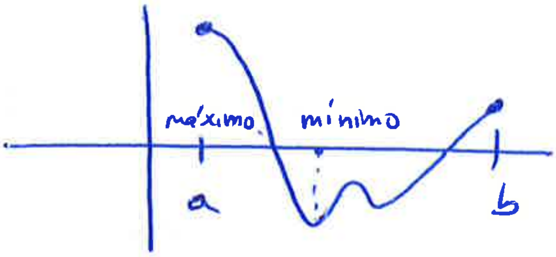
3) Criterio de parada

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \text{tolerancia } (\text{p.e. } 10^{-6}).$$

El comando find_root de Maxima está basado en el algoritmo de la bisección.

Teorema (Weierstrass)

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Entonces existen dos puntos en $[a,b]$ donde f alcanza sus valores máximo y mínimo.



Aplicación: existencia de solución en problemas de optimización no lineal. Por ejemplo,

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & \\ & a \leq x \leq b \end{cases}$$

Derivabilidad (Newton - Leibnitz, siglo XVIII)

Definición. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ y $x_0 \in]a,b[$.

Se dice que f es derivable en x_0 si existe (y es finito)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Al valor de dicho límite se le llama derivada de f en x_0 y se denota:

$$f'(x_0) \equiv \frac{df}{dx}(x_0) \equiv \dot{f}(x_0).$$

· Interpretación física de la derivada: cuando la función f representa una determinada magnitud física, $\frac{df}{dx}(x_0)$ representa la "tasa" de variación "infinitesimal" de dicha magnitud física. Recordar la ecuación de los gases ideales $pV = nRT \longrightarrow V = \frac{nRT}{p}$

$$V + \Delta V = \frac{nR(T+\Delta T)}{P}$$

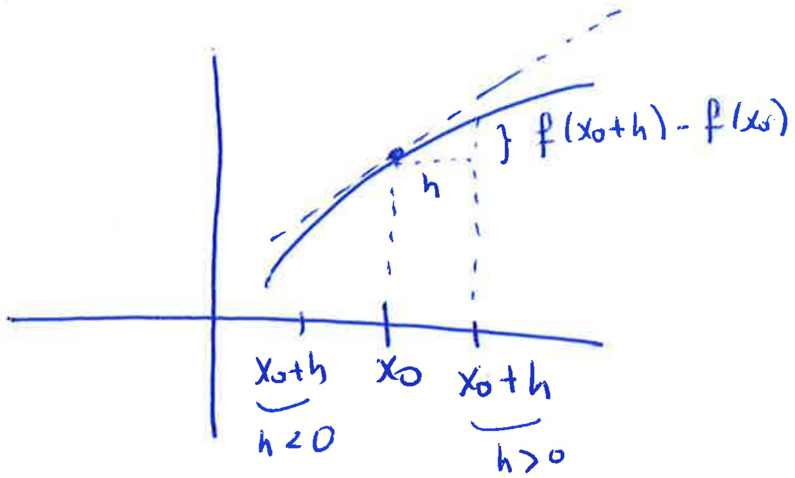
$$\Delta V = \frac{nR}{P}\Delta T;$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{nR}{P}$$

$$\Big\downarrow \Delta T \to 0$$

$$\frac{dV}{dT} = \frac{nR}{P}$$

· Interpretación geométrica de la derivada:



$f'(x_0)$ representa la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto x_0.

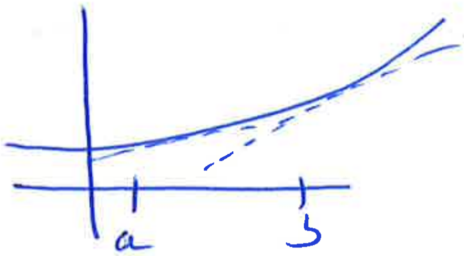
Propiedades de las funciones derivables

1) Si f es derivable en x_0, entonces f es cont^{a} en x_0.
2) Las funciones más usuales (polinomios, trigonométricas, etc.) son derivables.
3) La derivabilidad se conserva por las operaciones habituales (suma, ~~rest~~ producto, composición...)
4) La derivación es "lineal", es decir,

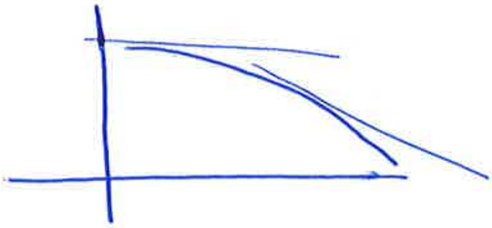
$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'.$$

Propiedades gráficas de las funciones derivables

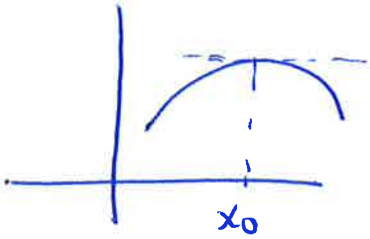
- f es creciente en $[a,b] \iff f'(x) \geq 0 \;\; \forall x \in [a,b]$



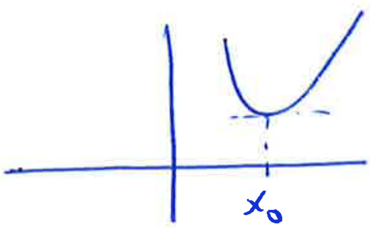
- f es decreciente en $[a,b] \iff f'(x) \leq 0 \;\; \forall x \in [a,b]$



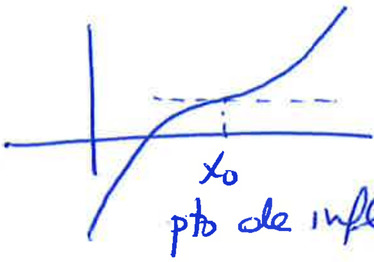
- Puntos críticos (máximos, mínimos y puntos de inflexión)



máximo



mínimo



pto de inflexión

Se dice que x_0 es un punto crítico de f si $f'(x_0)=0$.

Supongamos que x_0 es un punto crítico de f. Entonces:

- Si $f''(x_0) > 0$, entonces x_0 es un mínimo.
- Si $f''(x_0) < 0$, entonces x_0 es un máximo.

Ejemplos

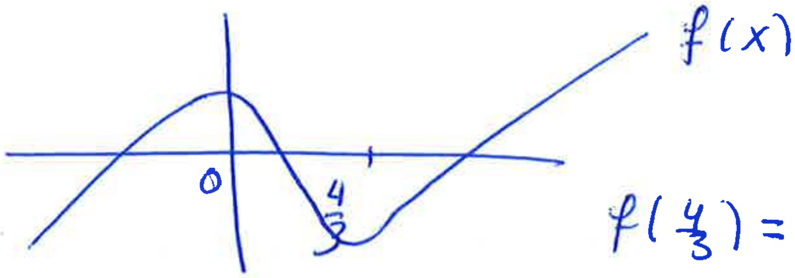
1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.

$f'(x) = 3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(3x-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$

$f''(x) = 6x - 4$

$f''(0) = -4 \to$ 0 es un máximo

$f''(\frac{4}{3}) = 6 \cdot \frac{4}{3} - 4 = 8 - 4 = 4 \to \frac{4}{3}$ es un mínimo.



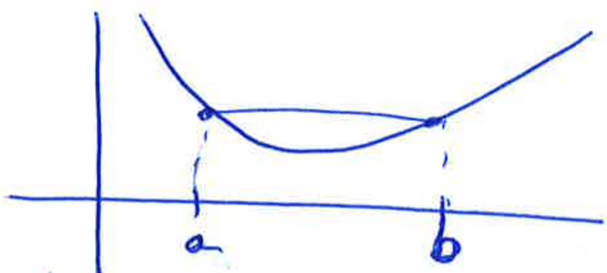
$f(\frac{4}{3}) = -\frac{5}{27}$

Convexidad y concavidad

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Se dice que f es convexa si

$\forall\, x, y \in [a,b]$ se cumple $f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$

$0 \leq t \leq 1$.



En caso contrario, se dice que f es cóncava.

Supongamos que $f \in C^2$, es decir, existen las derivadas segundas de f y son continuas. Entonces:

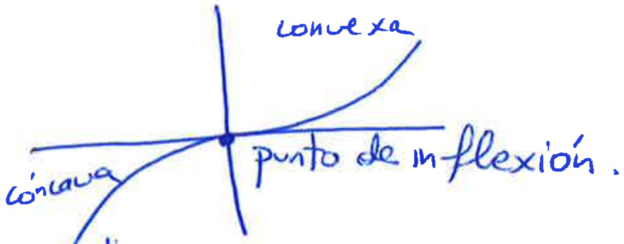
- f es convexa $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$.
- f es cóncava $\Leftrightarrow f''(x) \leq 0$

Ejemplo

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2 = 0 \iff x = 0$ punto crítico.

$$f''(x) = 6x \begin{cases} > 0 & \text{si } x > 0 \rightarrow \text{convexa.} \\ < 0 & \text{si } x < 0 \rightarrow \text{cóncava} \end{cases}$$

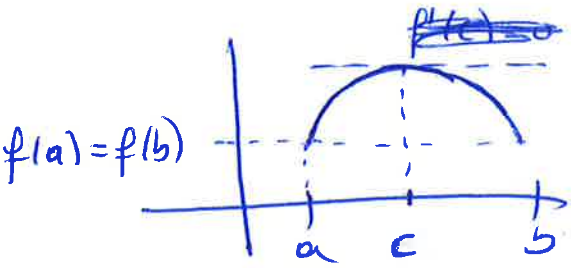


Teorema de Rolle

Sea $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$.

Si $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in]a,b[$ tal que

$$f'(c) = 0.$$



Teorema del valor medio

Sea $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$

Entonces existe $c \in]a,b[$ tal que

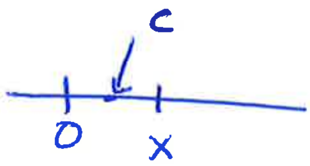
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Aplicación.

$f(b) = f(a) + f'(c)\,(b-a)$. Tomamos $b = x$. Entonces,

$$f(x) = f(a) + f'(c)\cdot(x-a).$$

Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = 0$.



$$\operatorname{sen} x = \cos(c)\cdot x$$

$$\text{si } x \ll 1 \rightarrow \cos(c) \simeq 1 \rightarrow \boxed{\operatorname{sen} x \simeq x}$$

Cálculo de límites. Regla de L'Hôpital

Sean f, g dos funciones tales que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$.

¿Cuánto vale $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$?

Veamos algunos ejemplos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 3 = 3.$$

Por tanto, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ es ~~una in~~ indeterminado.

Puede dar cualquier cosa, como hemos visto en los ejemplos anteriores.

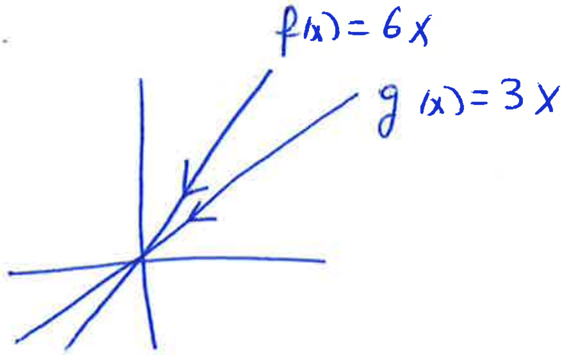
Regla de L'Hôpital

Si f y g son derivables, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Geométricamente, la regla de L'Hôpital indica que cuando dos funciones van a cero, la velocidad (derivada) a la que van a cero determina el valor del límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$



Por ejemplo,

$$\lim_{x \to 0} \frac{6x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{6}{3} = 2$$

¿Por qué $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$?

Como $f(a) = \lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = g(a) = 0$, entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Nota.- La regla de L'Hôpital también se aplica a indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ya que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

Ejemplos

. $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{e^x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)\cdot 3}{e^x} = 3$$

. $$\lim_{x\to \infty} x e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

. $$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x^2-1)}{3-x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{-1} = -\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2-1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2x} = 0.$$

Nota.- La regla de L'Hôpital también se aplica a indeterminaciones del tipo 1^∞. Veamos un ejemplo:

$$\lim_{x\to 0} (\cos(3x))^{\frac{1}{x^2}} \overset{1^\infty}{=} L$$

Si tomamos logaritmos neperianos:

$$\log L = \log \lim_{x\to 0} (\cos(3x))^{\frac{1}{x^2}}$$

log a cont$^{\underline{a}}$

$$= \lim_{x\to 0} \log (\cos(3x))^{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(3x))}{x^2}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\operatorname{sen}(3x)\cdot 3}{\cos(3x)}}{2x} =$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\uparrow}{=}} -\frac{3}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x\cos(3x)}$$

$$= -\frac{3}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)\cdot 3}{\cos(3x) - 3x\operatorname{sen}(3x)}$$

$$= -\frac{9}{2}.$$

Por tanto, $L = e^{-\frac{9}{2}}$ pues al tomar exponenciales en la expresión

$$\log L = -\frac{9}{2}$$

se tiene $e^{\log L} = L = e^{-\frac{9}{2}}$.

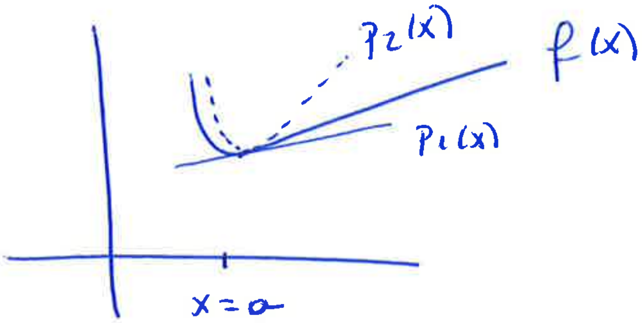
Aproximación de funciones por polinomios: desarrollos de Taylor

Sea $f: [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \to \mathbb{R}$ y supongamos que existen las derivadas de f en a hasta orden $n \in \mathbb{N}$.

Se llama polinomio de Taylor de f en a al polinomio

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

El objetivo que se persigue es aproximar una función en un punto por un polinomio. Es, por tanto, una aproximación local, es decir, válida únicamente cerca del punto $x=a$.



Al error entre $f(x)$ y $p_n(x)$, para x próximo a "a", se le llama resto de Taylor, es decir,

$$f(x) - p_n(x) = R_n(x), \quad x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon].$$

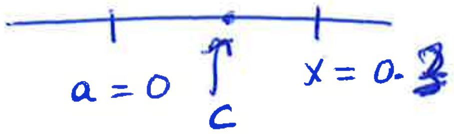
Si f tiene derivadas hasta orden $n+1$, dicho resto de Taylor puede expresarse como

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

donde $c \in [a, x]$ ó $c \in [x, a]$.

Ejemplo 1: calcular $\log(1.3)$ con un error $< 10^{-2}$

$$f(x) = \log(1+x)$$



$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

¿dónde parar para garantizar un error $< 10^{-2}$?

Usaremos el resto de taylor. Cálculo de la derivada n-ésima de f.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \quad , \quad f'(0) = 0.$$

$$f''(x) = -(1+x)^{-2}, \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = 2(1+x)^{-3}, \qquad f'''(0) = 2$$

$$f^{IV)}(x) = -3\cdot 2\cdot (1+x)^{-4}, \qquad f^{IV)}(0) = -3\cdot 2$$

$$f^{V)}(x) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot (1+x)^{-5}$$

$$- \; - \; - \; - \; - \; .$$

$$f^{n)}(x) = (n-1)!\,(-1)^{n+1}\,(1+x)^{-n}$$

Por tanto,

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}\, x^{n+1}$$

$$|R_n(0.2)| = \frac{|f^{n+1)}(c)|}{(n+1)!}\,(0.3)^{n+1}.$$

$$= \frac{n!\,(1+c)^{-(n+1)}}{(n+1)!}\,(0.2)^{n+1}$$

$$1+c \geq 1 \rightarrow (1+c)^{n+1} \geq 1^{n+1} = 1 \rightarrow \frac{1}{(1+c)^{n+1}} \leq 1$$

Así, $|R_n(0.2)| \leq \frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1} \leq 0.01.$

$n=1 \rightarrow |R_1(0.2)| \leq \frac{1}{2}(0.2)^2 = 0.02$ NO

$n=2 \rightarrow |R_1(0.2)| \leq \frac{1}{3}(0.2)^3 = 0.0026$ SI

Por tanto,

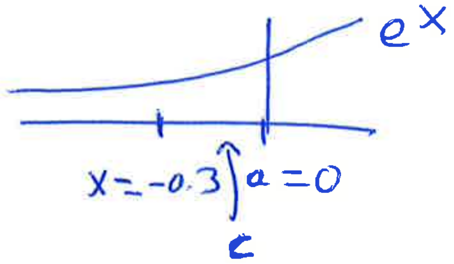
$$\log(1+x) \simeq \log(1) + \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2$$

$$\log(1.2) \simeq 0.2 - \frac{(0.2)^2}{2} = 0.2 - 0.02 = 0.18$$

Calculadora da 0.182321

<u>Ejemplo 2</u>. Calcular $e^{-0.3}$ con un error $< 10^{-3}$.

$f(x) = e^x$



$f'(x) = e^x$

$f''(x) = e^x$

$- \; - \; -$

$f^{n)}(x) = e^x$.

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$|R_n(-0.3)| \leq \frac{e^c}{(n+1)!} |(-0.3)^{n+1}| \leq \frac{\overset{1}{e^0}}{(n+1)!} (0.3)^{n+1}.$$

- $n=2 \longrightarrow |R_2(-0.3)| \leq \frac{1}{3!}(0.3)^3 = 4.5 \times 10^{-3}$
- $n=3 \longrightarrow |R_3(-0.3)| \leq 3.375 \times 10^{-4}$ OK.

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$$e^{-0.3} \simeq P_3(-0.3) = 1 - 0.3 + \frac{(-0.3)^2}{2!} + \frac{(-0.3)^3}{3!}$$

$$= 0.7405$$